Estimation de la période symbole d'un signal modulé linéairement basé sur des cyclo-corrélations

L. Mazet, Ph. Loubaton

Laboratoire Systèmes de Communication
Université de Marne-la-Vallée

14 Septembre 1999

Travail financé par le CELAR

Introduction

Soit

$$x_a(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} s(n) h_a(t - nT_s) + b_a(t)$$

- $(s(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ suite des symboles iid et circulaire.
- T_s période symbole à estimer.
- $h_a(t)$ filtre de mise en forme + effets du canal de propagation.
- $b_a(t)$ bruit gaussien de variance σ^2.

Les multiples entiers de $\frac{1}{T_s}$ sont les fréquences cycliques du signal $x_a(t)$.

On suppose que la bande de $x_a(t) \subset \left]-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}\right[\Longrightarrow$ une seule fréquence cyclique $\frac{1}{T_s}$

Soit $x(k) = x_a(kT_e)$ avec $T_e \leq \frac{T_s}{4}$

$\Longrightarrow$ Le cyclo-spectre à $\alpha_0 = \frac{T_e}{T_s}$ de $x(k)$ coïncide avec le cyclo-spectre $x_a(t)$ à $\frac{1}{T_s}$.

Méthode basée sur les cyclo-corrélations

$x(k)$ signal cyclo-stationnaire $\Rightarrow R(n,\tau) = \mathbf{E}\left[x(n+\tau)\overline{x(n)}\right]$ dépend de n.

$$R(n,\tau) = R^{(0)}(\tau) + R^{(\alpha_0)}(\tau)\mathrm{e}^{2i\pi\alpha_0 n} + R^{(-\alpha_0)}(\tau)\mathrm{e}^{-2i\pi\alpha_0 n}$$

avec $R^{(\alpha)}(\tau)$ cyclo-corrélation de fréquence α et de retard τ

$$\alpha_0 = \arg\max_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{\tau} \left| R_\tau^{(\alpha)} \right| \text{ avec } \mathcal{I} \text{ intervalle de recherche}$$

Estimateur de $R_\tau^{(\alpha)}$

$$\hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{T-1} x(n+\tau)\overline{x(n)}\mathrm{e}^{-2\pi i\alpha n}$$

avec T représentant le nombre d'échantillons.

$$\forall\tau, \forall\alpha \notin \{0, \alpha_0, -\alpha_0\} \qquad \lim_{T\to\infty} \hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau) = 0$$

Etude théorique

Comparaison de $R_T^{(\alpha_0)}(\tau)$ avec $R_T^{(\alpha)}(\tau)$ pour $\alpha \neq \alpha_0$.

$$\mathcal{R}_T(\alpha) = \mathbf{E}\left[\sum_{\tau=0}^{N} |\hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau)|^2\right] = \sum_{\tau=0}^{N} \mathbf{E}\left[|\hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau)|^2\right]$$

Soit

- $\mathbf{R}^{(\alpha)} = [R_0^{(\alpha)} \dots R_N^{(\alpha)}]^{\mathrm{T}}$
- $\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)} = [\hat{R}_0^{(\alpha)} \dots \hat{R}_N^{(\alpha)}]^{\mathrm{T}}$

$$\mathcal{R}_T(\alpha) = \mathbf{E}\left[\|\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}\|^2\right] = \mathrm{Trace}\left\{\mathbf{E}\left[\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}(\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)})^\star\right]\right\}$$

Performances théoriques

D'autre part $$\forall \alpha \neq \alpha_0 \quad T\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \Gamma(\alpha)\right)$$

Pour T suffisamment grand on a alors :

$$\mathcal{R}_T(\alpha) \sim \frac{1}{T} \lim_{T' \to \infty} T' \mathrm{Trace}\left\{ \mathbf{E}\left[\hat{\mathbf{R}}_{T'}^{(\alpha)} (\hat{\mathbf{R}}_{T'}^{(\alpha)})^{\star} \right] \right\} = \frac{\mathrm{Trace}\{\Gamma(\alpha)\}}{T}$$

Par ailleurs, $$\sqrt{T}\left(\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha_0)} - \mathbf{R}^{(\alpha_0)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma(\alpha_0))$$

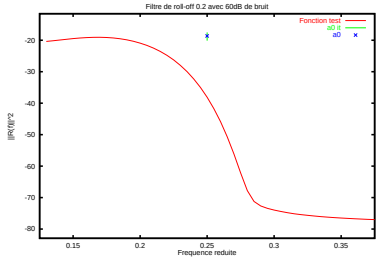
D'où

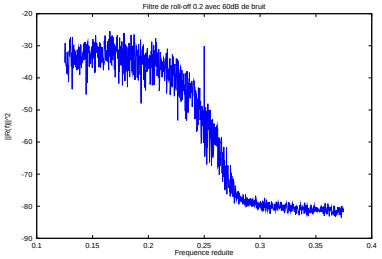
$$\sqrt{T}\left(\|\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha_0)}\|^2 - \|\mathbf{R}^{(\alpha_0)}\|^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma')$$

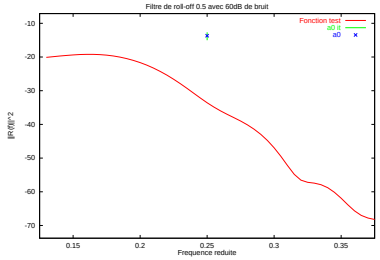
$$\Gamma' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(\alpha_0)\star} & \mathbf{R}^{(\alpha_0)\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma(\alpha_0) & \Gamma_c(\alpha_0) \\ \overline{\Gamma_c(\alpha_0)} & \overline{\Gamma(\alpha_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(\alpha_0)} \\ \overline{\mathbf{R}^{(\alpha_0)}} \end{bmatrix}$$

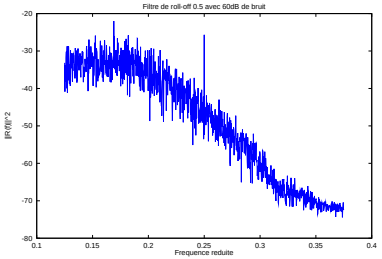
où $\Gamma_c(\alpha_0)$ est la covariance asymptotique circulaire de $\hat{\mathbf{R}}_T(\alpha_0)$.

Courbes Théoriques *Courbes expérimentales*









$\alpha_0 = \frac{1}{4}$, 1000 symboles, 20 corrélations, 60 dB de bruit et $\mathcal{I} = \left]\frac{1}{8}\ \frac{3}{8}\right[$

Roff-off	0.2	0.5	0.7
Performance (en %)	00.000	29.463	99.994

Performance sur 100000 expériences

Méthode basée sur les cyclo-corrélations normalisées

$\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$ dépend trop de α

Travaux de Dandawaté et Gianakis $\Longrightarrow$ Normalisation de $\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$ par $\Gamma(\alpha)$

Estimateur normalisé

$$\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha)^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$$

$\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$ est asymptotiquement circulaire si $\alpha \neq 0, \frac{\alpha_0}{2}, \alpha_0$

$$\Longrightarrow \alpha \neq 0, \tfrac{\alpha_0}{2}, \alpha_0 \ \sqrt{T}\mathbf{S}_T^{(\alpha)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \mathrm{I}_{N+1}\right)$$

D'où

$$\forall \alpha \neq 0, \frac{\alpha_0}{2}, \alpha_0 \qquad T \left\| \hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)} \right\|^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(2N+2)$$

On a alors :

$$\mathbf{E}\left[\left\| \hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)} \right\|^2 \right] = \frac{N+1}{T}$$

Estimateur normalisé (2)

Pour $\alpha = \alpha_0$ on a par contre :

$$\sqrt{T}\left(\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha_0)} - \mathbf{R}^{(\alpha_0)}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \Gamma(\alpha_0)\right)$$

D'où

$$\sqrt{T}\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha_0)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\mathbf{S}^{(\alpha_0)}, \mathrm{I}_{N+1}\right)$$

Avec $\mathbf{S}^{(\alpha_0)} = \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)\mathbf{R}^{(\alpha_0)}$

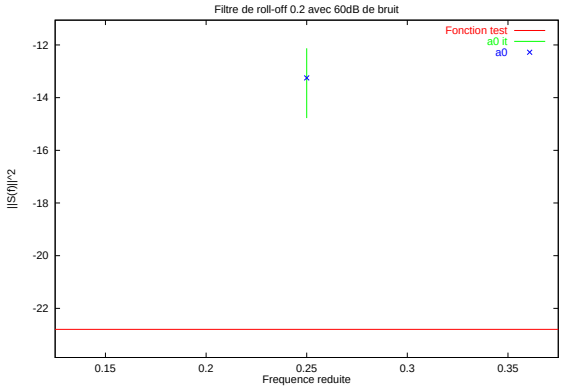
On a donc

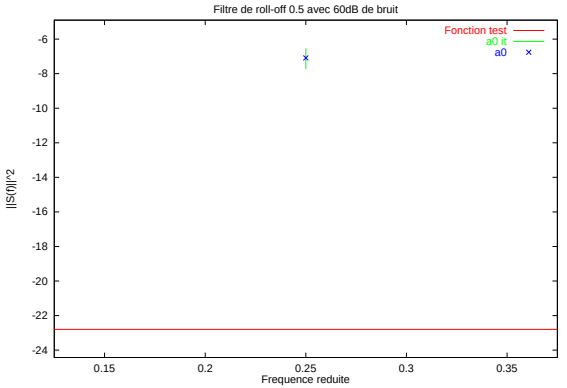
$$\sqrt{T}\left(\left\|\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha_0)}\right\|^2 - \left\|\mathbf{S}^{(\alpha_0)}\right\|^2\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left[\mathbf{S}^{(\alpha_0)\star}\ \mathbf{S}^{(\alpha_0)\mathrm{T}}\right] \zeta \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{(\alpha_0)} \\ \overline{\mathbf{S}^{(\alpha_0)}} \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{avec}\quad \zeta = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{N+1} & \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)\Gamma_c(\alpha_0)\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)^\star \\ \overline{\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)\Gamma_c(\alpha_0)\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)^{\mathrm{T}}} & \mathrm{I}_{N+1} \end{bmatrix}$$

Courbe théorique de $\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)}$

- $\left\|\mathbf{S}^{(\alpha_0)}\right\|^2$ entouré par un intervalle de confiance correspondant à 3 fois sa variance.
- Moyenne $\dfrac{N+1}{T}$ de $\left\|\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)}\right\|^2$ pour $\alpha \neq \alpha_0$.





$\Longrightarrow \left\|\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)}\right\|^2$ semble exploitable.

$\left\|\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)}\right\|^2$ dépend de α_0

Estimation de $\Gamma(\alpha)$

$x(n)$ est de bande limitée $\Longrightarrow$

$$\text{Pour } \alpha > \alpha_0 r,\ [\Gamma(\alpha)]_{(\tau_1,\tau_2)} \simeq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S^{(0)}(\mathrm{e}^{2i\pi f})\overline{S^{(0)}(\mathrm{e}^{2i\pi(f-\alpha)})}\mathrm{e}^{2i\pi(\tau_1-\tau_2)f}\mathrm{d}f$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} R^{(0)}_{u+\tau_1-\tau_2}\overline{R^{(0)}_u}\mathrm{e}^{2i\pi u\alpha}$$

On choisit comme intervalle de recherche $\mathcal{I} = \left]\frac{1}{8}\ \frac{3}{8}\right[$.

Estimateur proposé.

$$\left[\hat{\Gamma}_T(\alpha)\right]_{(\tau_1,\tau_2)} = \sum_{n=-2N}^{2N} w(n+\tau_1-\tau_2)\hat{R}^{(0)}_T(n+\tau_1-\tau_2)w(n)\overline{\hat{R}^{(0)}_T(n)}\mathrm{e}^{2i\pi n\alpha}$$

- $\hat{R}^{(0)}_T(\tau)$ l'estimateur « naturel » de la cyclo-corrélation d'ordre 0 et de retard τ
- $(w(n))_{n=-2N,2N}$: fenêtre de Blackmann garantissant la positivité de $\hat{\Gamma}_T(\alpha)$.

$\hat{\Gamma}_T(\alpha)$ non-consistant lorsque $\alpha < \alpha_0 r$.

Inversion de $\hat{\Gamma}_T(\alpha)$

Faible niveau de bruit $\longrightarrow \Gamma(\alpha)$ est très mal conditionnée.

$\Gamma(\alpha)$ Toeplitz associée à la densité spectrale $S^{(0)}(\mathrm{e}^{2i\pi f})S^{(0)}(\mathrm{e}^{2i\pi(f-\alpha)})$

$\longrightarrow$ nulle hors de l'intervalle $[\alpha - (1+r)\frac{\alpha_0}{2}, (1+r)\frac{\alpha_0}{2}]$.

Rang numérique de $\Gamma(\alpha) \simeq$ (taille de la matrice) $*$ (% de bande occupée).

$\Longrightarrow$ Utilisation de $\Delta^{(v)}$ la pseudo-inverse de $\Gamma(\alpha)$ à v valeurs propres.

Soient $\hat{\mathbf{S}}^{(\alpha)}_{(T,v)} = \left(\Delta^{(v)}(\alpha)\right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{R}}^{(\alpha)}_T$ et $\mathbf{S}^{(\alpha_0)}_{(v)} = \left(\Delta^{(v)}(\alpha)\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{R}^{(\alpha_0)}$.

$$\text{Pour } \alpha \neq \alpha_0,\ \sqrt{T}\hat{\mathbf{S}}^{(\alpha)}_{(T,v)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} \mathrm{I}_v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

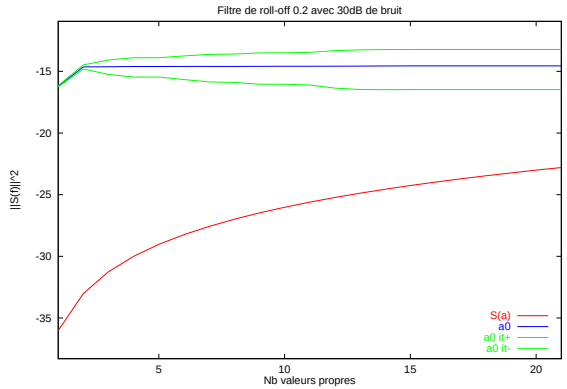
$$\Longrightarrow \sqrt{T}\left\|\hat{\mathbf{S}}^{(\alpha)}_{(T,v)}\right\|^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi^2(2v) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\left[\left\|\hat{\mathbf{S}}^{(\alpha)}_{(T,v)}\right\|^2\right] = \frac{v}{T}$$

Inversion de $\hat{\Gamma}_T(\alpha)$

Choix de v résulte d'un compromis car si $v \downarrow$

- pour $\alpha \neq \alpha_0$ la variance de $\|\hat{\mathbf{S}}^{(\alpha)}_{(T,v)}\|^2 \downarrow$
- $\mathbf{E}\left[\|\hat{\mathbf{S}}^{(\alpha)}_{(T,v)}\|^2\right] \downarrow$

Exemple : canal de roll-off 0.2 et 30 dB de bruit.



$\|\hat{\mathbf{S}}^{(\alpha)}_{(T,v)}\|^2$ et $\|\mathbf{S}^{(\alpha_0)}_{(T,v)}\|^2$ en fonction de v

Nous utilisons $\hat{\Delta}^{(v)}_T(\alpha)$ estimé de $\hat{\mathbf{S}}^{(\alpha)}_{(T,v)}$

Performances statistiques

100000 expériences avec un bruit de 60dB.

Roff-off	0.2	0.5	0.7
Performance (en %)	99.808	99.674	100.00

Rappel des performances de l'estimateur non normalisé.

Roff-off	0.2	0.5	0.7
Performance (en %)	00.000	29.463	99.994

Remarque : pour $r = 0.7$, l'estimation biaisée de $\Gamma(\alpha)$ ne perturbe pas l'algorithme.

Performances statistiques

100000 expériences avec un bruit de 60dB.

Roff-off	0.2	0.5	0.7
Performance (en %)	99.808	99.674	100.00

Rappel des performances de l'estimateur non normalisé.

Roff-off	0.2	0.5	0.7
Performance (en %)	00.000	29.463	99.994

Remarque : pour $r = 0.7$, l'estimation biaisée de $\Gamma(\alpha)$ ne perturbe pas l'algorithme.

Conclusions

- Nouvel estimateur basé sur les corrélations cycliques estimées convenablement renormalisé.
- Estimateur de la matrice de normalisation.
- Excellentes performances (même pour $r = 0.2$ et $T = 1000$).