

Estimation de la période symbole d'un signal modulé linéairement basé sur des cyclo-corrélations.

L. Mazet*, Ph. Loubaton
Laboratoire Système de Communication
Université de Marne-la-Vallée
5, boulevard Descartes
Champs sur Marne
77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France
Tel.: (33) 1 60 95 72 90 Fax: (33) 1 60 95 72 14
mazet@univ-mlv.fr, loubaton@univ-mlv.fr

Résumé — Dans cet article, nous considérons le problème de l'estimation du débit de modulation utilisé par un émetteur inconnu. Pour ceci, nous proposons d'utiliser la cyclostationnarité du signal. Nous commençons par considérer un estimateur classique [1] consistant à maximiser dans le domaine des fréquences cycliques une somme de modules carrés de corrélations cycliques. Compte tenu des performances assez décevantes observées dans le cas de signaux d'excès de bande réduit, nous introduisons un second estimateur basé sur l'action du vecteur des corrélations estimées sur la racine carrée de sa matrice de covariance asymptotique. Ce type de normalisation a été déjà introduit par [2]. Cependant, la matrice de covariance utilisée pour normaliser est inconnue, et dépend du débit de modulation recherché [2] ne propose pas de solution pour l'estimer à partir des signaux observés. Dans cet article, nous montrons que cette matrice peut être estimée simplement sans avoir à estimer au préalable le débit de modulation, et évaluons les performances du nouvel estimateur correspondant. Ses performances sont très nettement supérieures à celles qui sont fournies par la maximisation de la norme du vecteur des cyclo-corrélations non normalisé.

Abstract — In this paper, we consider the estimate problem of the modulation rate used by an unknown sender by using the signal cyclostationarity. First, we study a classic method [1] based on the maximization in the frequency domain of a square modulus cyclic correlation sum. In regard of its weak performances for limit bandwidth signal, we set a second method based on the effect of the correlation vector upon its asymptotic covariance matrix. This kind of normalization was already shown in [2]. But, the covariance matrix used to normalize is unknown and depend of the modulation rate we are looking for; [2] didn't solved this estimation problem. In this paper, we show a easy way to estimate the asymptotic correlation matrix without any knowledge of the modulation rate and evaluate the new method performances. Its performances are substantially better than the one the classic method based on the maximization of the cyclic correlation vector modulus can produce.

1 Introduction

On suppose que l'on reçoit un signal à temps continu $x_a(t)$ qui s'écrit sous la forme :

$$x_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s(n)h_a(t - nT_s) + b_a(t) \quad (1)$$

où, $(s(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ désigne la suite des symboles iid et circulaire, T_s représente la période symbole que nous cherchons à estimer, $h_a(t)$, que nous supposons sans restriction de durée limitée, résulte du filtre de mise en forme de l'émetteur et d'éventuels multi-trajets et $b_a(t)$ est un bruit gaussien de variance σ^2 connue.

Le travail qui suit est basé sur le fait que les multiples entiers de $\frac{1}{T_s}$ sont fréquences cycliques du signal $x_a(t)$. Toutefois, compte tenu de la limitation en bande passante induite par l'utilisation des filtres de mise en forme usuels, nous supposons que $x_a(t)$ ne possède qu'une seule fréquence cyclique non nulle positive qui vaut $\frac{1}{T_s}$. Par ailleurs, nous supposons que la bande passante de $x_a(t)$ a été sommairement évaluée et que l'on a pu échantillonner $x_a(t)$ à une fréquence T_e supérieure à $\frac{T_s}{4}$. Dans ces conditions, le signal à temps discret correspondant $x(k)$ est

cyclostationnaire de fréquence cyclique $\frac{T_e}{T_s}$, et son cyclo-spectre coïncide (à un facteur près) avec le cyclo-spectre du signal à temps continu $x_a(t)$ à la fréquence $\frac{1}{T_s}$.

2 Méthode basée sur les cyclo-corrélations

Contrairement aux signaux stationnaires, ici, $R_\tau(n) = \mathbf{E} [x(n + \tau)\overline{x(n)}]$ dépend de n . Dans notre cas particulier, $(R_\tau(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ peut s'écrire :

$$R_\tau(n) = R_\tau^{(0)} + R_\tau^{(\alpha_0)} e^{2i\pi\alpha_0 n} + R_\tau^{(-\alpha_0)} e^{-2i\pi\alpha_0 n} \quad (2)$$

où chaque $R_\tau^{(\alpha)}$ est le coefficient de cyclo-corrélation de fréquence α et de retard τ et α_0 vaut $\frac{T_s}{T_e}$.

2.1 Définition de l'estimateur

Soit $\hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau)$ l'estimateur de $R_\tau^{(\alpha)}$ défini par :

$$\hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} x(n + \tau)\overline{x(n)} e^{-2\pi i \alpha n} \quad (3)$$

où T représente le nombre d'échantillons. Pour tout τ , lorsque $T \rightarrow \infty$, $\hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau)$ tend vers 0 lorsque α est différent

*Thèse financée par le CELAR

de 0, α_0 et $-\alpha_0$. Par conséquent, il est naturel d'estimer α_0 en résolvant le problème de maximisation suivant (voir [1]) :

$$\max_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{\tau=0}^N |\hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau)|^2 \quad (4)$$

où N représente le nombre de coefficients de cyclo-corrélation et \mathcal{I} représente l'intervalle de recherche des fréquences cycliques qui, bien entendu, doit exclure 0.

2.2 Etude théorique

Afin d'avoir une idée des performances de cet estimateur, nous avons calculé grâce à une approximation gaussienne la valeur moyenne

$$\mathcal{R}_T(\alpha) = \mathbf{E} \left[\sum_{\tau=0}^N |\hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau)|^2 \right] = \sum_{\tau=0}^N \mathbf{E} \left[|\hat{R}_T^{(\alpha)}(\tau)|^2 \right] \quad (5)$$

pour $\alpha \neq \alpha_0$, et l'avons comparé à la norme du vecteur de composantes $R_T^{(\alpha_0)}(\tau)$ entouré par un intervalle de confiance. Bien entendu, ceci ne constitue par une étude statistique exhaustive de l'estimateur, mais permet d'avoir une bonne idée *a priori* de ses performances. Pour cela, posons $\mathbf{R}^{(\alpha)} = [R_0^{(\alpha)} \dots R_N^{(\alpha)}]^\top$ et $\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)} = [\hat{R}_0^{(\alpha)} \dots \hat{R}_N^{(\alpha)}]^\top$. Nous pouvons ré-exprimer $\mathcal{R}_T(\alpha)$ en fonction de $\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$ par :

$$\mathcal{R}_T(\alpha) = \mathbf{E} \left[\|\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}\|^2 \right] = \text{Trace} \left\{ \mathbf{E} \left[\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)} (\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)})^* \right] \right\}$$

D'autre part, pour $\alpha \neq \alpha_0$, $T\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$ converge en loi vers une gaussienne centrée de variance $\Gamma(\alpha)$. En faisant l'hypothèse que T est suffisamment grand pour que le comportement de $\mathcal{R}_T(\alpha)$ corresponde à son comportement asymptotique, nous pouvons réécrire $\mathcal{R}_T(\alpha)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_T(\alpha) &\sim \frac{1}{T} \lim_{T' \rightarrow \infty} T' \text{Trace} \left\{ \mathbf{E} \left[\hat{\mathbf{R}}_{T'}^{(\alpha)} (\hat{\mathbf{R}}_{T'}^{(\alpha)})^* \right] \right\} \\ &= \frac{1}{T} \text{Trace} \left\{ \lim_{T' \rightarrow \infty} T' \mathbf{E} \left[\hat{\mathbf{R}}_{T'}^{(\alpha)} (\hat{\mathbf{R}}_{T'}^{(\alpha)})^* \right] \right\} \\ &= \frac{\text{Trace} \{ \Gamma(\alpha) \}}{T} \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\sqrt{T} \left(\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha_0)} - \mathbf{R}^{(\alpha_0)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma(\alpha_0))$. La fonction $\|\cdot\|^2$ ayant une différentielle non nulle en $\mathbf{R}^{(\alpha_0)}$, nous pouvons utiliser le théorème de transfert et affirmer que $\sqrt{T} \left(\|\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha_0)}\|^2 - \|\mathbf{R}^{(\alpha_0)}\|^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma')$ où Γ' est défini par :

$$\Gamma' = \left[\mathbf{R}^{(\alpha_0)*} \mathbf{R}^{(\alpha_0)\top} \right] \begin{bmatrix} \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\Gamma_c(\alpha_0)} & \frac{\Gamma_c(\alpha_0)}{\Gamma(\alpha_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(\alpha_0)} \\ \mathbf{R}^{(\alpha_0)} \end{bmatrix}$$

où $\Gamma_c(\alpha_0)$ est la covariance asymptotique circulaire de $\hat{\mathbf{R}}_T(\alpha_0)$.

Considérons le cas $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, $T = 4000$ (soit 1000 symboles). Nous représentons figure 1 la fonction $\mathcal{R}_T(\alpha)$ dans l'intervalle de recherche $[\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ pour un filtre de mise en forme de roll-off de 0.2 (courbe de gauche) et de 0.5 (courbe de droite), ainsi que $\mathcal{R}_T(\alpha_0)$ entouré par un intervalle représentant trois fois l'écart type de $\|\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha_0)}\|^2$; le rapport signal sur bruit est de 60dB. On peut constater que dans le cas 0.2, l'espérance mathématique de la variable à maximiser est très proche de $\hat{\mathbf{R}}_T(\alpha_0)$ pour des valeurs de α situées aux alentours de 0.15. Ceci suggère que l'estimateur proposé doit avoir de médiocres performances.

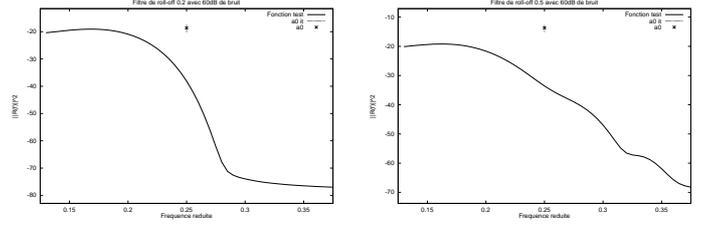


FIG. 1 – Fonction $\mathcal{R}_T(\alpha)$.

2.3 Expérimentation

Pour illustrer ce qui précède, nous avons effectué quelques tests sur des signaux simulés en nous plaçant dans les mêmes conditions expérimentales ($\alpha_0 = \frac{1}{4}$, 1000 symboles, et 20 corrélations pour les mêmes filtres). Les courbes figure 2 représentent des réalisations de $\|\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}\|^2$.

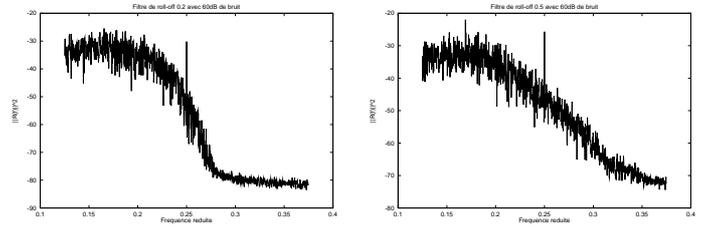


FIG. 2 – Fonction $\hat{\mathcal{R}}_T$.

Nous avons effectué une série de tests statistiques (sur 100000 expériences) pour déterminer en fonction du roll-off, la probabilité que l'estimateur de α_0 se trouve dans l'intervalle $[\alpha_0 - \frac{1}{2T}, \alpha_0 + \frac{1}{2T}]$ en balayant l'intervalle $[\frac{1}{2}\alpha_0, \frac{3}{2}\alpha_0]$. Ces simulations ont toutes été effectuées avec un bruit de 60dB.

TAB. 1 – Performance de l'estimateur basé sur les corrélations cycliques.

Roll-off	0.2	0.5	0.7
Performance (en %)	0.00	29.46	99.99

Les résultats présentés dans le tableau 1 sont extrêmement décevants pour des roll-off de 0.2 et 0.5 comme on pouvait s'y attendre.

3 Méthode basée sur les cyclo-corrélations normalisées

Le problème majeur de la méthode précédente vient de ce que la variance de l'estimateur $\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$ dépend trop de la fréquence testée. Il aurait été préférable que cette dernière soit la plus proche possible d'une constante.

3.1 Définition de l'estimateur.

En nous inspirant des travaux de Dandawaté et Giannakis [2] ainsi que de ceux de Marchand [3], nous avons voulu normaliser $\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$ pour obtenir un estimateur dont les performances sont moins sensibles aux filtres de mise en

forme. Définissons le vecteur $\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)}$ par :

$$\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)} = \Gamma(\alpha)^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)} \quad (6)$$

où on se rappelle que $\Gamma(\alpha)$ est la matrice de covariance asymptotique du vecteur $\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$. Pour $\alpha \neq 0, \pm\alpha_0$, $\sqrt{T}\mathbf{S}_T^{(\alpha)}$ tend en loi vers une loi normale centrée de variance \mathbf{I}_{N+1} où \mathbf{I}_{N+1} est la matrice identité de taille $N+1$. Par ailleurs, il est facile de démontrer que :

Prop. 1 *Sous l'hypothèse que la suite des symboles est circulaire, le vecteur aléatoire $\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$ est asymptotiquement circulaire si $\alpha \neq 0, \frac{\alpha_0}{2}, \alpha_0$.*

De ceci, on déduit immédiatement que dans l'intervalle de recherche $]\frac{\alpha_0}{2}, \frac{3\alpha_0}{2}[$, $T\|\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)}\|^2$ tend pour $\alpha \neq \alpha_0$ vers une loi du χ^2 à $2N+2$ degrés de liberté. La valeur moyenne de $\|\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)}\|^2$ vaut $\frac{N+1}{T}$ pour tout α de l'intervalle de recherche différent α_0 . Pour $\alpha = \alpha_0$, on a par contre :

$$\sqrt{T} \left(\hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha_0)} - \mathbf{R}^{(\alpha_0)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \Gamma(\alpha_0) \right)$$

Ainsi, $\sqrt{T}\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha_0)}$ tend vers une loi normale de moyenne $\mathbf{S}^{(\alpha_0)} = \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)\mathbf{R}^{(\alpha_0)}$ et de variance \mathbf{I}_{N+1} . En utilisant le théorème de transfert, nous obtenons donc que :

$$\sqrt{T} \left(\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha_0)} - \mathbf{S}^{(\alpha_0)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left(0, \left[\mathbf{S}^{(\alpha_0)*} \mathbf{S}^{(\alpha_0)\text{T}} \right] \zeta \left[\begin{array}{c} \mathbf{S}^{(\alpha_0)} \\ \mathbf{S}^{(\alpha_0)} \end{array} \right] \right)$$

avec

$$\zeta = \left[\begin{array}{cc} \frac{\mathbf{I}_{N+1}}{\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)\Gamma_c(\alpha_0)\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)^{\text{T}}} & \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)\Gamma_c(\alpha_0)\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0)^* \\ & \mathbf{I}_{N+1} \end{array} \right]$$

Nous représentons sur les courbes de la figure 3 la moyenne $\frac{N+1}{T}$ de $\|\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)}\|^2$ pour $\alpha \neq \alpha_0$ ainsi que $\|\mathbf{S}^{(\alpha_0)}\|^2$ entouré par un intervalle de confiance correspondant à 3 fois sa variance.

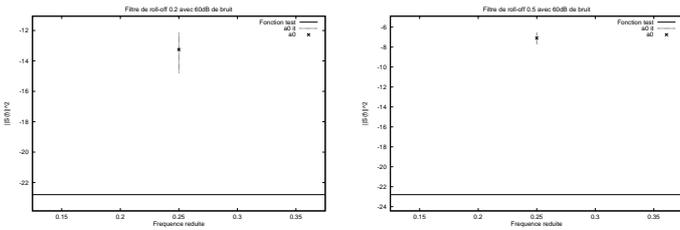


FIG. 3 – Valeur moyenne de $|\hat{\mathbf{S}}_T^{(\alpha)}|^2$

Contrairement aux courbes de $\mathcal{R}_T(\alpha)$ (fig. 1), les courbes présentées en figures 3 nous permettent d'entrevoir un estimateur performant de α_0 . Cependant, $\Gamma(\alpha)$ est évidemment inconnue, et il est nécessaire en pratique de l'estimer.

3.2 Estimation de $\Gamma(\alpha)$

L'estimation de $\Gamma(\alpha)$ est passé sous silence dans [2]. Cependant, ce problème est assez embarrassant dans la mesure où l'expression de $\Gamma(\alpha)$ dépend du cyclo-spectre de $x(n)$ à la fréquence cyclique α_0 . On a en effet :

$$\Gamma(\alpha)_{(\tau_1, \tau_2)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S^{(0)}(e^{2i\pi f}) \overline{S^{(0)}(e^{2i\pi(f-\alpha)})} e^{2i\pi(\tau_1 - \tau_2)f} df \quad (7)$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \overline{S^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi(f-\alpha)})} e^{2i\pi(\tau_1 - \tau_2)f} df e^{2i\pi\alpha_0\tau_2} \\ + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S^{(-\alpha_0)}(e^{2i\pi f}) \overline{S^{(-\alpha_0)}(e^{2i\pi(f-\alpha)})} e^{2i\pi(\tau_1 - \tau_2)f} df e^{-2i\pi\alpha_0\tau_2}$$

Toutefois, en prenant en compte le caractère bande limitée de $x(n)$, on peut montrer que, si $\alpha > \alpha_0 r$ (r représente le roll-off), alors l'expression de $\Gamma(\alpha)$ ne dépend que des statistiques cycliques de $x(n)$ à la fréquence cyclique 0. Plus précisément, compte tenu des supports des cyclo-spectres apparaissant dans (7) (voir le tableau 2), $\Gamma(\alpha)$ se réduit au premier terme de (7) pour $\alpha > \alpha_0 r$. Le pre-

TAB. 2 – Support des différents cyclo-spectres.

Fonction	Support en α
$S^{(0)}(e^{2i\pi f})$	$[-\frac{1+r}{2}\alpha_0, \frac{1+r}{2}\alpha_0]$
$S^{(\alpha_0)}(e^{2i\pi f})$	$[\frac{1-r}{2}\alpha_0, \frac{1+r}{2}\alpha_0]$
$S^{(-\alpha_0)}(e^{2i\pi f})$	$[-\frac{1+r}{2}\alpha_0, -\frac{1-r}{2}\alpha_0]$

mier terme de (7) s'exprime sous la forme $[\Gamma(\alpha)]_{(\tau_1, \tau_2)} = \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} R_{u+\tau_1-\tau_2}^{(0)} \overline{R_u^{(0)}} e^{2i\pi u\alpha}$ et peut donc être estimé par :

$$[\hat{\Gamma}_T(\alpha)]_{(\tau_1, \tau_2)} = \sum_{n=-2N}^{2N} w(n+\tau_1-\tau_2) \hat{R}_T^{(0)}(n+\tau_1-\tau_2) \overline{w(n) \hat{R}_T^{(0)}(n)} e^{2i\pi n\alpha} \quad (8)$$

où $\hat{R}_T^{(0)}(\tau)$ est l'estimateur « naturel » défini par (3) de la cyclo-corrélation d'ordre 0 et de retard τ , et où $(w(n))_{n=-2N, 2N}$ représente une fenêtre de Blackmann garantissant la positivité de la matrice $\hat{\Gamma}_T(\alpha)$. Cet estimateur est évidemment non-consistant lorsque $\alpha < \alpha_0 r$. Il est donc crucial d'être en mesure de limiter l'intervalle de recherche. Dans nos diverses expérimentations, nous supposons qu'un examen de la bande passante du signal reçu a permis de limiter l'intervalle de recherche à $\alpha > \frac{\alpha_0}{2}$. Nos estimateurs de $\Gamma(\alpha)$ ne seront donc pas consistants lorsque $r > \frac{1}{2}$. Toutefois, nous verrons que ceci n'a pas de conséquence fâcheuse car l'estimation de α_0 est un problème relativement facile lorsque r est suffisamment grand (les résultats obtenus pour $r = 0.7$ sont par exemple tout à fait convenables).

3.3 Inversion de $\hat{\Gamma}_T(\alpha)$

Si le niveau de bruit est faible, la matrice $\Gamma(\alpha)$ est très mal conditionnée. $\Gamma(\alpha)$ peut s'interpréter comme une matrice de Toeplitz $(N+1) \times (N+1)$ associée à la densité spectrale $S^{(0)}(e^{2i\pi f}) \overline{S^{(0)}(e^{2i\pi(f-\alpha)})}$, qui en absence de bruit s'annule hors de l'intervalle $[\alpha - (1+r)\frac{\alpha_0}{2}, (1+r)\frac{\alpha_0}{2}]$. La bande passante occupée est donc égale à $(1+r)\alpha_0 - \alpha$. Il est bien connu que le rang numérique de $\Gamma(\alpha)$ est à peu près égal au produit de la taille de la matrice par le pourcentage de bande occupée. Soit donc $\Delta^{(v)}$ la pseudo-inverse de $\Gamma(\alpha)$ obtenue en tronquant sa décomposition en éléments propres à ses v valeurs propres les plus significatives. Ceci modifie évidemment les propriétés de la statistique à partir de laquelle est effectuée l'estimation.

Soit $\hat{\mathbf{s}}_{(T,v)}^{(\alpha)} = (\Delta^{(v)}(\alpha))^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)}$ et $\mathbf{s}_{(v)}^{(\alpha_0)} = (\Delta^{(v)}(\alpha_0))^{-\frac{1}{2}} \mathbf{R}^{(\alpha_0)}$. Dans l'intervalle de recherche, $\sqrt{T}\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)}$ tend pour $\alpha \neq \alpha_0$ en loi vers une loi normale circulaire centrée de variance \mathbf{U}_{N+1}

où U_{N+1} est une matrice de taille $(N + 1) \times (N + 1)$ dont le bloc supérieur gauche est constitué de la matrice I_v et dont les autres termes sont nuls. Donc $\sqrt{T}\|\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)}\|^2$ tend vers une loi du χ^2 à $2vx$ degrés de liberté dont la valeur moyenne est de $\frac{v}{T}$.

Le choix de v résulte d'un compromis : diminuer v diminue la variance de $\|\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)}\|^2$ pour $\alpha \neq \alpha_0$, mais diminue également sa valeur en α_0 . Afin d'illustrer ceci, prenons, par exemple, un canal ayant un roll-off de 0.2 et 30 dB de bruit. La figure 4 permet de comparer plusieurs

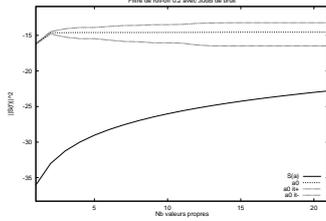


FIG. 4 – $\|\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)}\|^2$ et $\|\mathbf{S}_{(T,v)}^{(\alpha_0)}\|^2$ en fonction de v .

courbes : les deux premières courbes présentent respectivement la valeur moyenne de $\|\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)}\|^2$ pour $\alpha \neq \alpha_0$ et $\|\mathbf{S}_{(T,v)}^{(\alpha_0)}\|^2$ en fonction du nombre de valeurs propres prises en compte pour le calcul de $\Delta^{(v)}(\alpha)$; les deux autres encadrent $\|\mathbf{S}_{(T,v)}^{(\alpha_0)}\|^2$ à plus ou moins trop fois son écart-type. Il semble donc préférable de prendre v le plus petit possible.

Il faut toutefois être prudent sur les conclusions qu'il convient de tirer des remarques qui précèdent dans la mesure où la matrice $\Delta^{(v)}(\alpha)$ est évidemment remplacée par un estimateur appelé $\hat{\Delta}_T^{(v)}(\alpha)$ déduit immédiatement de l'estimateur de $\Gamma(\alpha)$. Cette remarque est illustrée dans le paragraphe suivant.

4 Expérimentations

En pratique, on remplace donc $\Delta^{(v)}(\alpha)$ par son estimée $\hat{\Delta}_T^{(v)}(\alpha)$, et la statistique $\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)}$ sur laquelle nous opérons vaut en fait :

$$\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)} = \left(\hat{\Delta}_T^{(v)}(\alpha)\right)^{\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{R}}_T^{(\alpha)} \quad (9)$$

Les courbes (fig. 5) représentent en fonction de α des réalisations de $\|\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)}\|^2$ pour divers roll-off et $v = 2$.

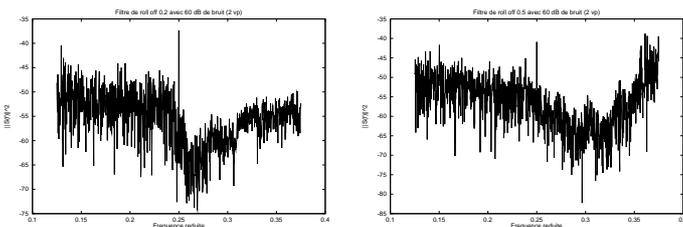


FIG. 5 – Fonction $\|\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)}\|^2$ pour différents roll-off.

Les signaux contiennent 1000 symboles avec $\alpha_0 = \frac{1}{4}$. Nous avons des filtres ayant tous les mêmes retards mais

des roll-off différents. Nous n'avons pris en compte que 20 corrélations et 2 valeurs propres pour le calcul de $\hat{\Delta}_T^{(v)}(\alpha)$. Contrairement à ce que laissent supposer les courbes présentées figure 4, le faible nombre de valeurs propres considérées pour le calcul de $\Delta_{(T,v)}(\alpha)$ influe dramatiquement sur $\|\hat{\mathbf{S}}_{(T,v)}^{(\alpha)}\|^2$ ainsi que sur l'amplitude du pic en α_0 . Il semble que prendre un nombre de valeurs propres plus important permet de remédier un peu à ce phénomène.

Nous avons ensuite effectué des tests statistiques pour évaluer ses performances. Pour cela, nous avons effectué 100000 expériences pour évaluer la probabilité de bonne détection de α_0 avec un bruit de 60dB.

TAB. 3 – Performance de la fonction de test test_S pour différents roll-off.

Roll-off	0.2	0.5	0.7
Performance (en %)	99.808	99.674	100.00

Il est intéressant de noter pour un roll-off de 0.7 que, malgré une estimation biaisée de $\Gamma(\alpha)$ la normalisation ne perturbe pas le fonctionnement de notre algorithme.

5 Conclusions

Nous avons proposé d'estimer le débit de modulation en opérant sur le vecteur des corrélations cycliques estimées convenablement renormalisé, et avons mis en évidence un estimateur de la matrice de normalisation.

L'approche basée sur une renormalisation du vecteur des cyclo-corrélations estimées, malgré une mise en place moins aisée, semble fournir d'excellentes performances, et permet de rendre faisable l'estimation de la période symbole avec 1000 symboles quand le roll-off est de l'ordre de 0.2.

Références

- [1] W.A. Gardner, *Signal interception, a unifying theoretical framework for feature detection*, IEEE trans. on com., Vol. 36 No. 8, August 1988.
- [2] A.V. Dandawaté and G.B. Giannakis, *Statistical tests for presence of cyclostationarity*, IEEE trans. on sig. pro., Vol. 42 No. 9, September 1994.
- [3] Pierre Marchand, *Détection et reconnaissance de modulation numériques à l'aide des statistiques cycliques d'ordre supérieur*, Thèse INPG, Octobre 1998.